Lösningar till tre matematiska problem

1. Tändsticksspelet
Detta är inte format som ett problem, men man skulle kunna säga att ett naturligt problem är att försöka avgöra om det finns en vinnande strategi för någon av spelarna. Är det så att den spelare som börjar (spelare A) kan göra ett drag så att den alltid vinner? Eller är det så att spelare A alltid förlorar om B spelar på bästa sätt?

Ett bra sätt att närma sig många problem är att man försöker hitta enklare varianter av problemet och löser dessa först. Därefter går man vidare och försöker lösa det ursprungliga problemet. Här gör vi så att vi undersöker hur man ska spela om man i stället för 9 stickor har 1, 2, 3 och så vidare antal tändstickor.

Spelar man med 1, 2 eller 3 tändstickor vinner den som börjar. Om man spelar med fyra tändstickor kommer den som börjar att förlora om den tar 1 eller 3 stickor eftersom den andra spelaren då helt enkelt kan ta de återstående stickorna. Om den förste spelaren tar 2 stickor får den andre inte ta 2. Om den andre spelaren tar 1 sticka får den förste spelaren inte ta den återstående stickan och kommer att förlora även då. Oavsett hur den förste spelaren gör, kommer den alltså att förlora om den andre spelaren gör rätt.

Om man spelar med 5 stickor kan spelare A ta 1 sticka och lämna 4 stickor till B. Detta är en **förlorande position** och B kommer då att förlora enligt resonemanget ovan. En vinnande strategi i spelet innebär just att man kan placera sin motståndare i en förlorande position.

Spelar man med 6 eller 7 stickor kan spelare A placera spelare B i en förlorande position med 4 stickor. Hur blir det då om man spelar med 8 stickor? Jo, ta spelare A 1 eller 3 stickor, tar B 3 eller 1 sticka och placerar A i en förlorande position med 4 stickor. Om A i stället tar 2 stickor, tar B 1 sticka. Då har A 5 stickor, men att ta 1 sticka är förbjudet. A måste då ta 2 eller 3 stickor varefter B i nästa drag tar de återstående stickorna. Med 8 stickor kommer alltså A att förlora.

På motsvarande sätt som i resonemanget ovan, kan vi komma fram till att 8 stickor också är en förlorande position. Om man spelar med 9 stickor kan A ta 1 sticka och placera B i en förlorande position med 8 stickor. A har alltså en vinnande strategi.

Spelet kan utvidgas. Vem vinner om man börjar med exempelvis 14 stickor? Vem vinner om man spelar med 20 stickor och får ta 1, 2, 3 eller 4 stickor? Vem vinner med 15 stickor om man inte får ta samma antal stickor som man själv tog i sitt förra drag?

2. Kvadraten
Siffrorna 1-9 ska placeras ut. Summan av dessa siffror är 45. Eftersom det är 3 rader och alla ska ha samma summa, måste denna summa vara lika med 45/3= 15.

Nästa sak att fundera över är vilken eller vilka siffror som är möjliga att sätta i mitten. Eftersom 5 är mitt i följden 1-9 verkar det rimligt att det är 5 som ska sitta i mitten. Men hur fungerar det med 4 eller 6? Vi testar med att sätta 4 i mitten. Någonstans måste 1 sitta och vi får summan 1 + 4 = 5. För att man ska få summan 15 måste då det tredje talet vara 10 och det finns ju inte. Lägre siffror än 4 fungerar inte de heller.

Sätter vi 6 i mitten kan vi resonera på motsvarande sätt. Någonstans måste 9 sitta, vilket ger summan 6 + 9 = 15 med bara två tal. Eftersom det finns ett tredje tal, kommer summan här att bli över 15. Högre siffror än 6 fungerar inte de heller och alltså måste 5 sitta i mitten.

Siffran 9 får inte sitta i samma rad, kolumn eller diagonal som någon av siffrorna 6, 7 eller 8. På motsvarande sätt får inte 1 sitta tillsammans med 2, 3 eller 4. Sätter man någon av 1 eller 9 i ett hörn, kan man konstatera att det bara är två rutor i kvadraten som kommer att ingå i någon rad, kolumn eller diagonal som är gemensam med det hörn där 1 eller 9 sitter. Det går alltså inte att sätta 1 eller 9 i ett hörn.

Kvar återstår att testa om 1 och 9 kan sitta mitt på en sida. Vi börjar med att sätta 9 ovanför 5. Vi kunde lika gärna ha satt 9 till höger, nedanför eller till vänster om 5 och vi återkommer till detta. Mittemot 9 måste 1 sitta. På sidorna måste 9 ha 2 och 4 (och man kan sätta 2 till höger i stället om man vill).

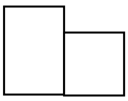
2	9	4
	5	
	1	

När man kommit så här långt finns det bara ett sätt att placera ut resten av siffrorna och det visar sig då att summorna på alla ledder blir 15. Man kan vrida eller spegla kvadraten. Då får man lösningar som på ett är skilda från den lösning vi fått här, men på ett annat sätt kan ses som samma lösning.

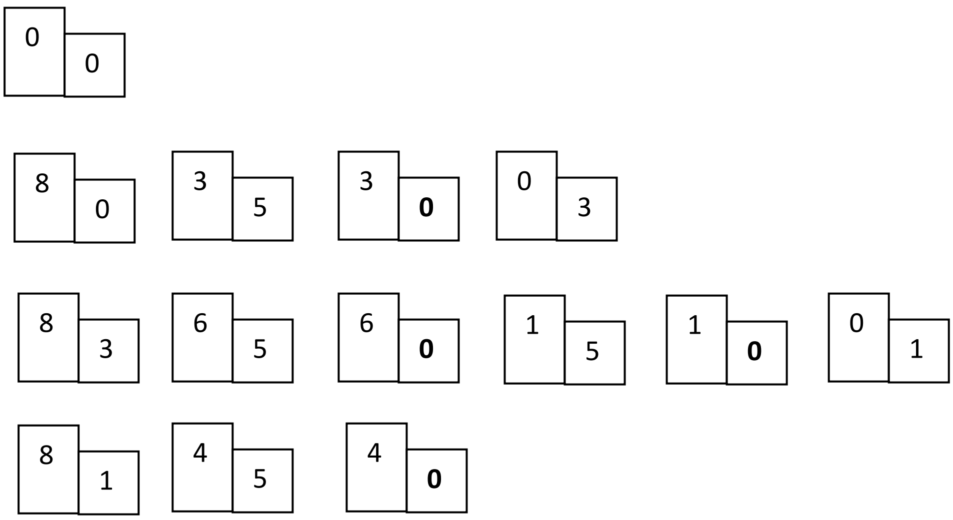
2	9	4
7	5	3
6	1	8

3. Hinkproblemet

Detta problem löses bäst genom att man testar sig fram. Man ska dock göra detta på ett **systematiskt** sätt. Dessutom är det bra om man kan hitta på ett bra sätt att bokföra vad man gör. Det kan man göra genom att införa en lämplig **notation**. I inför skrivsättet nedan för de två hinkarna, där den större rutan står för åttalitershinken.



Vi testar systematiskt genom att vi tänker oss att vi har floden till vänster. Vi fyller sedan alltid åttalitershinken och häller från denna till femlitershinken, men inte tvärtom. Vatten i femlitershinken kan vi tömma ut åt höger om vi behöver. Vi låter alltså vattnet röra sig i riktning från vänster till höger, från floden till åttalitershinken till femlitershinken till marken. Nedan visar vi med vår notation hur mycket vatten som finns i de två hinkarna efter varje hällning.



Tillvägagångssättet går att beskriva i ord, men det är nog lättare att förstå hur man ska göra genom att titta på notationen och tänka den enkla notationen ”Häll från vänster till höger”, där varje rad börjar med att vi fyller åttalitershinken.

Vi har lagt till ett extra sista ”onödigt” steg där vi tömmer femlitershinken. Dessutom har vi fetmarkerat alla ”drag” där vi tömmer femlitershinken. Vi gör alltså tre fyllningar av åttalitershinken och fyra tömningar av femlitershinken. Vi kan sammanfatta detta i beräkningen $3\cdot 8 - 4\cdot 5 = 4$. Om vi i stället häller från femlitershinken till åttalitershinken, och i övrigt resonerar på motsvarande sätt, kan vi sammanfatta den lösning man får på detta sätt med beräkningen $4\cdot 5 - 2\cdot 8 = 4$.